Permutasi & Kombinasi

Pendahuluan

- Sebuah sandi-lewat (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan sandi-lewat yang dapat dibuat?

```
abcdef
aaaade
a123fr
…
erhtgahn
yutresik
…
```

????

Definisi

- **Kombinatorial** adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

Kaidah Dasar Menghitung

- Kaidah perkalian (*rule of product*)

    Percobaan 1: p hasil

    Percobaan 2: q hasil

    Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

    Percobaan 1: p hasil

    Percobaan 2: q hasil

    Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada *n* percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

   $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ hasil

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

   $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ hasil

- **Contoh 3.** Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

  (a) panjang *string* 5 bit

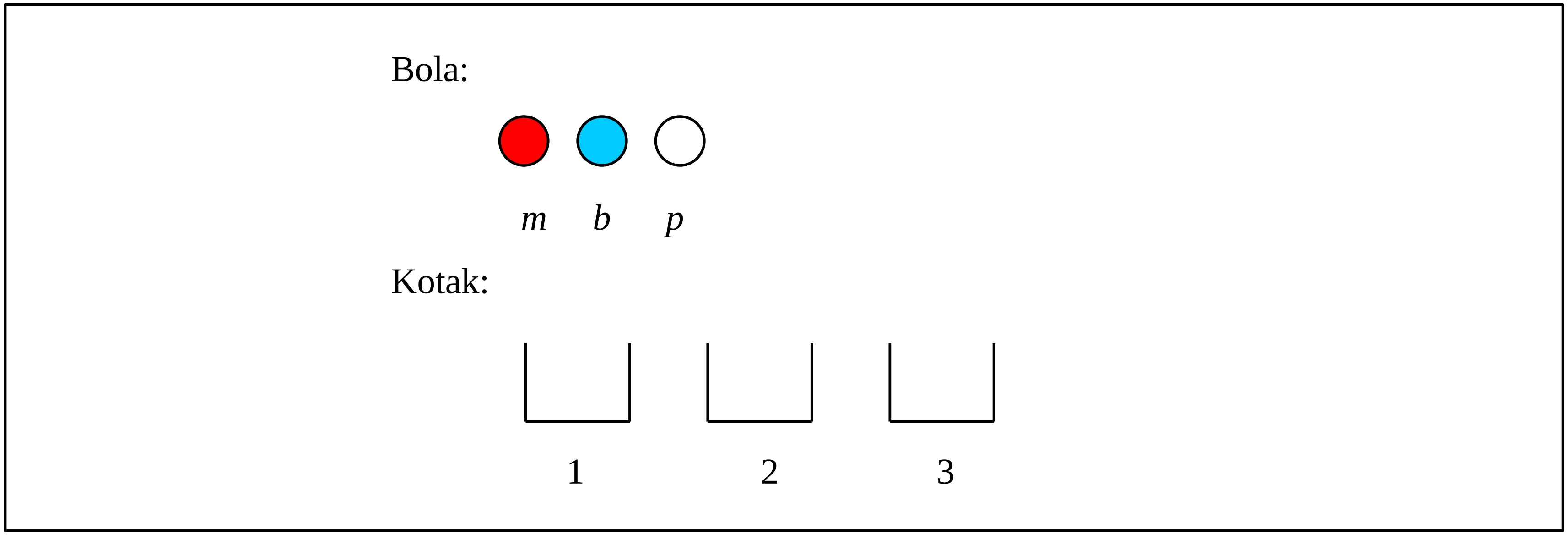
  (b) panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

  Penyelesaian:

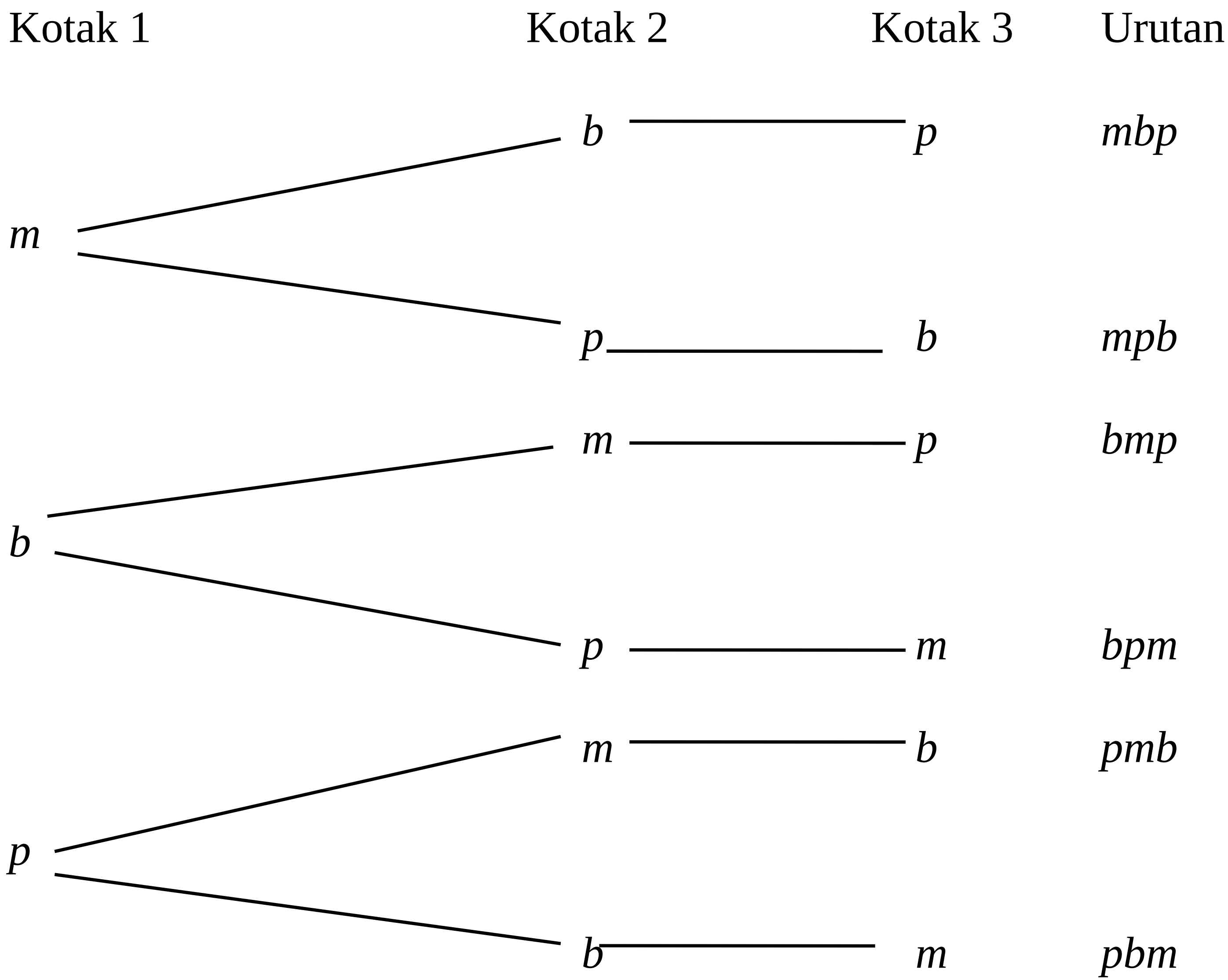
  (a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah

  (b) $2^8 = 256$ buah

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

- **Definisi**: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n, maka

✓ urutan pertama dipilih dari n objek,

✓ urutan kedua dipilih dari $n – 1$ objek,

✓ urutan ketiga dipilih dari $n – 2$ objek,

✓…

✓urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1) = n!$$

- **Contoh 6.** Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari kata "HAPUS"?

  Penyelesaian:

  Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

- **Contoh 7.** Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

  Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

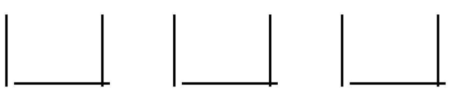
Permutasi *r* dari *n* elemen

- Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:

m *b* *p* *h* *k* *j*

Kotak:



1 2 3

<u>Penyelesaian</u>:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola
→ (ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola → (ada n – 1 pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola → (ada n – 2) pilihan;

…

kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola
→ (ada $n - r + 1$ pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$

Definisi 2. Permutasi *r* dari *n* elemen adalah jumlah kemungkinan urutan *r* buah elemen yang dipilih dari *n* buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 60 buah
Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 60

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 5^3 = 125.

Contoh 8. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

Penyelesaian: $P(26, 4) \times P(10,3)$ = 258.336.000

Latihan:

1. Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

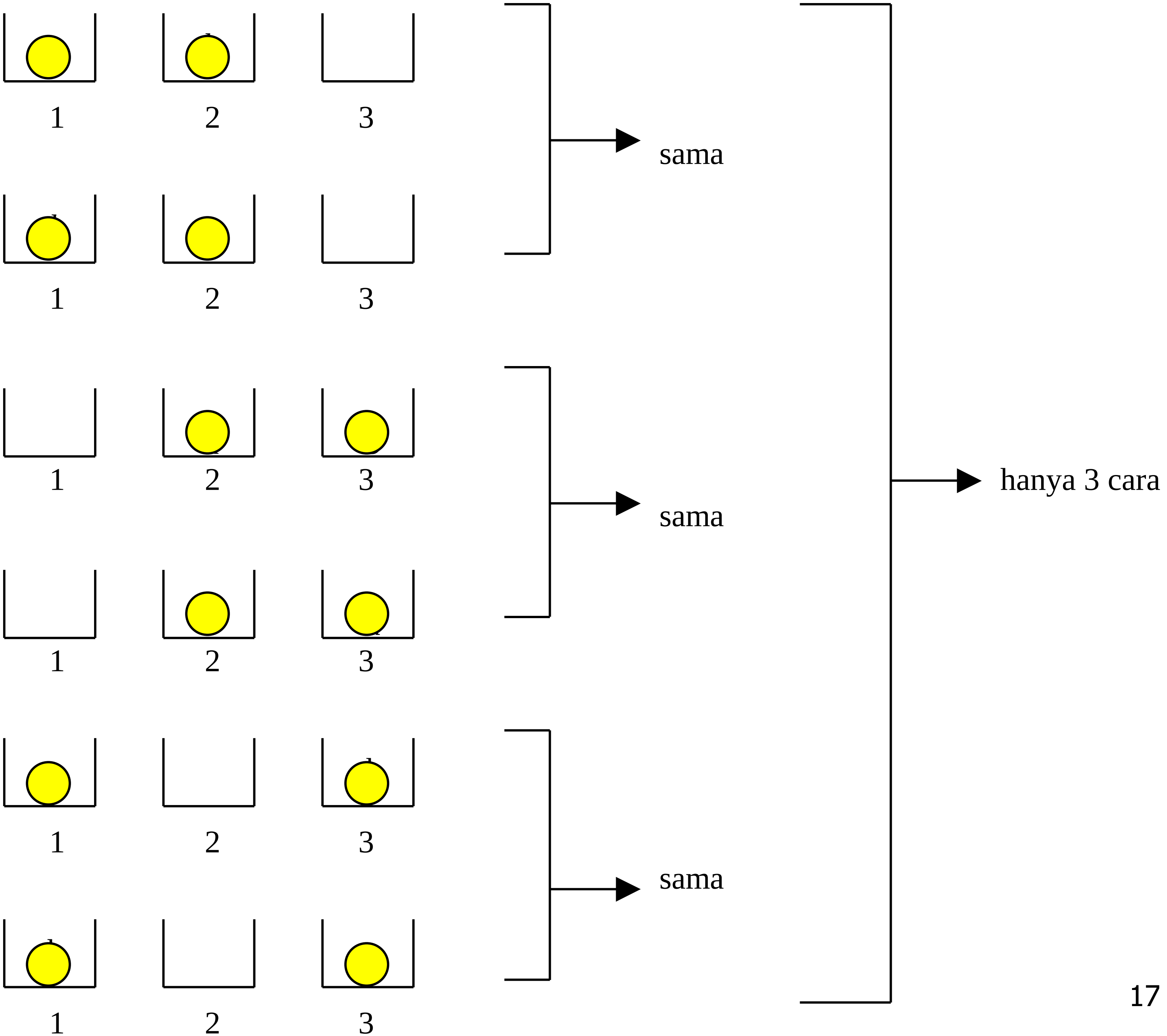
Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


1 2 3
1 2 3
sama
1 2 3
1 2 3
sama
1 2 3
1 2 3
sama
hanya 3 cara

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r) \text{ atau } \binom{n}{r}$$

- $C(n, r)$ sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.

- **Definisi 3.** Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

   Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$
   Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l}\{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\}\end{array}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

   atau $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{(3-2)!2!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 9. Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2002, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

(a) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;
(b) mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;
(c) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;
(d) mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;
(e) mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;
(f) setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

(a) $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga A selalu termasuk di dalamnya.

(b) $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga A tidak termasuk di dalamnya.

(c) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A termasuk di dalamnya, tetapi B tidak.

(d) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga B termasuk di dalamnya, tetapi A tidak.

(e) $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A dan B selalu termasuk di dalamnya.

(f) Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari A atau B termasuk di dalamnya

= jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A termasuk di dalamnya, B tidak

+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga B termasuk di dalamnya, A tidak

+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A dan B termasuk di dalamnya

= 70 + 70 + 56 = 196

Prinsip inklusi-eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan B

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A dan B, maka

$|X| = C(9, 4) = 126$; $|Y| = C(9, 4) = 126$;

$|X \cap Y| = C(8, 3) = 56$;

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$$

Latihan:

1. Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi 10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:

   (a) jika bioskop dalam keadaan terang

   (b) jika bioskop dalam keadaan gelap

3. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?

2 wanita & 3 pria = C(5,2) x C(7,3) = 10 x 35 = 350

3 wanita & 2 pria = C(5,3) x C(7,2) = 10 x 21 = 210

4 wanita & 1 pria = C(5,4) x C(7,1) = 5 x 7 = 35

5 wanita & 0 pria = C(5,5) x C(7,0) = 1 x 1 = 1 +

596 Cara

P.S: 0!=1

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,
n_2 bola diantaranya berwarna 2,
$\vdots$
n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

⋮

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!...n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2\,, n_3)$

$\ldots\, C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k\text{-}1}, n_k)$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\;\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

$$\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!}$$

$$\ldots\quad \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = C(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Contoh 10. Berapa banyak "kata" yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

<u>Penyelesaian</u>:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P , P , I\}$

huruf M = 1 buah (n_1)

huruf I = 4 buah (n_2)

huruf S = 4 buah (n_3)

huruf P = 2 buah (n_4)

$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah = $| S |$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

$= 34650$ buah

Contoh 11. Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

<u>Penyelesaian:</u>

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga = $\dfrac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$ cara

Contoh 12. 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:
n = 18; n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 5, dan n_4 = 6 (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $\dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara

Latihan:

1. 100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?
2. Berapa banyak kata terbentuk dari penggunaan huruf-huruf pada kata *MATEMATIKADASARSATU*

Koefisien Binomial

$(x + y)^0 = 1$	1
$(x + y)^1 = x + y$	1 1
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	1 2 1
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 3 3 1
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	1 4 6 4 1
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$	1 5 10 10 5 1

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1}\, y^1 + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k}\, y^k + \ldots + C(n, n)\, y^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, x^{n-k}\, y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

Contoh 15. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + C(3, 3)\, b^3 \\ &= 1\,(3x)^3 + 3\,(3x)^2\,(-2) + 3\,(3x)\,(-2)^2 + 1\,(-2)^3 \\ &= 27\,x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

Contoh 16. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\ x^{5-3}\ (-y)^3 = -10x^2y^3$.

- Tentukan koefisien suku x^4y^3 dari $(2x+\sqrt{y})^{10}$